Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2013/2014. 4. feladatsor***
7.-8. évfolyam

MEGOLDÁSOK

1.) Mivel a két szám legnagyobb közös osztója a 24, így mindkét szám 24 többszöröse, azaz $a = 24k$ és $b = 24l$, ahol a, b, k és l pozitív egész számokat jelöl. Tudjuk, hogy $216 = a + b = 24(k + l)$, azaz 24-gyel egyszerűsítve: $9 = k + l$. Mivel a sorrend nem számít, 4 különböző megoldást találunk: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$, de ezek közöl a 3 és a 6 nem relatív prímek, vagyis nem 24, hanem $3 \cdot 24 = 72$ lenne a két szám legnagyobb közös osztója. Vagyis 3 számpár felel meg a feltételeknek: 24 + 192, 48 + 168 és 96 + 120.

2.) A három számot jelölje a, b és c, és legyen $a < b < c$. Tudjuk, hogy $c - \mathrm{a} = 66$ és $c = k \cdot a$, ahol k egy pozitív egész szám. Vagyis $k \cdot a - a = (k - 1) \cdot a = 66$. Ezek szerint a a 66 valamely osztója, c 66-tal több, b pedig 100-ra egészíti ki a és c összegét.

a	1	2	3	6	11	22	33	66
b	32	30	28	22	12	negatív	negatív	negatív
c	67	68	69	72	77	88	99	132

A táblázat alapján 5 megfelelő számhármas található.

3.) Először nézzük meg 2014 prímtényezős felbontását, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Mivel mindhárom tényező első hatványon szerepel, így a három keresett szám egyikében sem szerepelhetnek magasabb hatványon, és egyiknek sem lehet más prím osztója, hisz akkor az is szerepelne a legkisebb közös többszörösben. A legnagyobb közös osztó nem lehet a szereplő három prím közül kettővel is osztható, mert akkor a harmadik prímmel vagy a 3 szám közül kettő osztható, de akkor azok nem különbözők, vagy csak egy osztható, de akkor a másik két szám egyforma, holott három különböző számot keresünk. Így az 53 a lehető legnagyobb közös osztó, 53 – 106 – 1024 pedig egy lehetséges számhármas.

4.) Jelölje d a 4 szám legnagyobb közös osztóját. Mind a négy szám osztható vele, azaz mind felírható d többszöröseként, így $1995 = d(x + y + z + v)$, ahol a zárójelben szereplő betűk pozitív egész számokat jelölnek. Mivel $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, így d-nek 16 lehetséges értéke van (a szereplő 4 prím mindegyikéről elmondható, hogy vagy szerepel d-ben vagy nem, azaz $2^4 = 16$ eset van) Egy adott d érték vizsgálatakor a legkisebb közös többszörös akkor lesz a legkisebb, ha a zárójelben szereplő négy szám közül 3 egyforma, a negyedik pedig a lehető legkisebb, legjobb esetben 1. A zárójelben szereplő négy szám legnagyobb közös osztója 1 kell, hogy legyen, különben ki lehetne emelni még egy közös tényezőt.

d	$x+y+z+v$	legkisebb közös többszörös	megjegyzés
1	1995=664+664+664+3	1992	
3	665=221+221+221+2	1326	
5	399=132+132+132+3		3 és 132 nem relatív prímek
7	285=94+94+94+3	1974	
19	105=34+34+34+3	1938	
$3\cdot 5$	133=44+44+44+1	660	
$3\cdot 7$	95=31+31+31+2	1302	
$3\cdot 19$	35=8+8+8+3	1368	
$5\cdot 7$	57=18+18+18+3		3 és 18 nem relatív prímek
$5\cdot 19$	21=6+6+6+3		3 és 6 nem relatív prímek
$7\cdot 19$	15=4+4+4+3	1596	
$3\cdot 5\cdot 7$	19=6+6+6+1	630	
$3\cdot 5\cdot 19$	7=2+2+2+1	570	
$3\cdot 7\cdot 19$	5=1+1+1+2	798	
$5\cdot 7\cdot 19$	3		a 3 nem írható föl 4 pozitív egész összegeként
$3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$	1		az 1 nem írható föl 4 pozitív egész összegeként

A táblázatból látható, hogy a legkisebb közös többszörös legkisebb értéke 570, s ekkor a 4 szám: 570, 570, 570 és 285.